数理解析研究所講究録
946 巻 1996 年 110-124

ロイデン調和境界の連結性

名古屋工大 中井 三留 (MITSURU NAKAI)

1. 緒言

Riemann多様体Mの理想境界δを2個の部分δ_0とδ_1に分割する．δ_0を接地しδ_1を総エネルギー有限な電荷で帯電して自明でない電界を形成しδ_1上に電位1を生ずるように出来るとき$(M;\delta_0,\delta_1)$はコンデンサーであると言う．δをどの様に分割してもコンデンサーが作れない条件を求める問題をコンデンサー問題と言う．此の問題の解は，Mの2位のRoyden調和境界$\varDelta_2(M)$が連結となることであることが知られている（例えば，[4]参照）．此の見地から$\varDelta_2(M)$の連結性を保証する条件に興味がある．特に，Mがd次元Euclid空間R^d $(d\geq 2)$の有界領域である場合に，Mの相対境界∂Mの連結性からどの程度$\varDelta_2(M)$の連結性が惹起されるかを論ずる．2位のRoyden調和境界$\varDelta_2(M)$ばかりでなく任意の $1<p<\infty$に対するp位のRoyden調和境界$\varDelta_p(M)$の場合も含めて考える．次の結果に注目する．

2．定理．B^dをR^dの単位球とする．するとB^dのp位Royden調和境界$\varDelta_p(M)$は$1<p<2$のとき非連結，$2\leq p<\infty$のとき連結となる．

此の結果は[5]により得られ，[1]が別証を与えている．B^dの特徴的性質である有界性と∂B^dの連結性に注目して，一般にR^dの部分領域Mが有界で∂Mが連結（これは$R^d\setminus M$が連結なことと同値）のとき簡単のため許容領域と呼ぶ．上の定理2のB^dを許容領域Mで置き換えることが出来ないかと言う形に設問を具体化する．d=2なら無条件でこれが正しいことがわかる（後出の定理12参照）が，d≧3ならば，例えば許容領域

(3) $$M=2B^d\setminus(\overline{B}^d\cup\{\lambda e_1:1\leq\lambda\leq 2\}),\quad e_1=(1,0,\cdots,0)$$

をとると，$\varDelta_p(M)$が$1<p\leq d-1$に対して非連結となって，もはや定理2のB^dを(3)のMで置き換えることが出来ない．実際B^dは許容領域であるばかりでなく，∂B^dの滑らかさもまた特徴的なので，許容領域Mの相対境界∂Mの滑らかさが定理2のB^dをMで置き換え得る

条件を与えるのではないかと考えられる．此の方向の結果として∂MがC^2級である様な許容領域Mならば良いことを示した（[7]）．一般に色々の場面に於て∂MのC^2級であることとC^1級であることとの間には大きな差がある．そこで∂MがC^1級ではどうであるかと言う問いに対して次のように更に一般な結果を得た．

4．主定理．MをLipschitz許容領域とすると，$\Delta_p(M)$は$1<p<2$のとき非連結となり$2\leq p<\infty$のとき連結となる．

本論文の目的は上の主要結果がどの様にして導かれるかを説明することにある．ここで上に出てきたLipschitz領域及び関連領域の定義を述べる．R^dの領域Mをとる．

先ずMが**連続領域**であるとは，各$\xi\in\partial M$に対して，R^dの固有直交座標系に適当なEuclid運動を施して得られるξを原点とする様なR^dのある新直交座標系

$$x=(x^1,\cdots,x^{d-1},x^d)=(x',x^d)$$

と，ξ中心半径$\rho=\rho(\xi)>0$の開球$B(\xi,\rho)$の超平面$x^d=0$への射影$B'(\xi,\rho)$上の連続関数$x^d=\varphi(x')$があってMは$\xi\in\partial M$で局所的に

$$B(\xi,\rho)\cap M=B(\xi,\rho)\cap\{(x',x^d):x^d>\varphi(x')\} \tag{5}$$

と表され更に∂Mは$\xi\in\partial M$で局所的に

$$B(\xi,\rho)\cap\partial M=B(\xi,\rho)\cap\{(x',x^d):x^d=\varphi(x')\} \tag{6}$$

と表されることであるとする．φのことを連続領域Mの局所表示関数という．

次にMが指数$r>1$の**弱Lipschitz領域**であるとは，Mが連続領域であって，その局所表示関数φが先ず第一に$\varphi\in W^{1,r}(B'(\xi,\rho))$（Sobolev空間）であり，ついで

$$\limsup_{h'\in R^{d-1},\,h'\to 0}\frac{|\varphi(x'+h')-\varphi(x')|}{|h'|}<\infty \tag{7}$$

をすべての$x'\in B'(\xi,\rho)$に対して満たすものとする．

最後に，Mが**Lipschitz領域**であるとは，Mが連続領域であって，その局所表示関数φに対して正定数$L=L(\xi)$が存在して，いわゆるLipschitzの条件

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|\leq L|x-y| \tag{8}$$

がすべての$B'(\xi,\rho)$の2点xとyに対して成立することである．(8)から(7)は無論のこと，φがACL（一つの座標軸に平行なその座標軸に垂直な平面測度に関して殆どすべての直線上絶対連続）で，殆ど到るところ存在する通常の$\nabla\varphi\in L^\infty(B'(\xi,\rho))$であるので，すべての有限な$r>1$に対して$\varphi\in W^{1,r}(B'(\xi,\rho))$となる．ゆえにLipschitz領域は，すべての指数$r>1$の弱Lipscitz領域となる．だから

{Lipschitz領域}⊂{弱Lipschitz領域}⊂{連続領域}.

さて主定理の後半部分は実は次の更に一般な結果から従う.

9. 定理. Mを連続許容領域とすると, $2\le p<\infty$のときMのRoyden調和境界$\Delta_p(M)$は連結である.

此の結果は∂Mの滑らかさを全く仮定しないのでかなり最終的な形に近ずいていると思われる. 主定理の前半部分も又次の更に一般な主張から従う.

10. 定理. 任意の$1<p<2$に対し, $r>\max(2p/(2-p),p/(p-1))$となる任意のrをとる. Mがr位の弱Lipschitz領域ならば, $\Delta_p(M)$は非連結である.

主定理を示す為には従って定理9及び10を示せば良い. その際, 指数pは$1<p\le d$に限定して良いこと（即ち$d<p<\infty$の場合は実は考える必要の無いこと）, 及び空間の次元は$d\ge3$に限定して良いこと（即ち$d=2$の場合は考えなくて良いこと）, の２点を注意しておく. なぜならば, それは一般に次の２つの定理が成り立つからである.

11. 定理. R^d($d\ge2$)の任意の許容領域Mにたいして, 無条件に, $d<p<\infty$である限り常に$\Delta_p(M)$は連結である.

12. 定理. 2次元Euclid空間R^2の任意の許容領域Mに対して, $\Delta_p(M)$は$1<p<2$のとき非連結, $2\le p<\infty$のとき連結である.

以下13節でRoyden調和境界の定義とその意義, 及びその連結性と言う幾何学的な性質が, どの様な解析的な性質を反映しているかを説明する. 20節では上で最後に注意した定理11と12に略証を与える. 21節から定理9の証明が始まる. 完全な証明はとても長いので紙数の制約上, 略証ときにはごく大雑把な説明しか出来ないが, とにかく25節で定理9の証明を完結する. 定理10の証明は28節から始まる. 具体的に関数を構成することに依って証明が達成されるので内容は初等的ながらやはり証明は短くないので, 此の部分も又大体の説明で終る部分が多い.

13. Royden調和境界

定義だけは一般的に出来るので, ここではMをC^∞級のRiemann多様体で, 非完閉, 可符号, 連結とする. 指数$1<p<\infty$を任意にとる. 超関数勾配$\nabla f\in L^p(M)$となる局所可積分関

数fの全体がDirichlet空間$L^{1,p}(M)$である（$W^{1,p}(M):=L^{1,p}(M)\cap L^p(M)$をSobolev空間と言う）．$L^{1,p}(M)$の列$(f_n)_{n\geq 1}$が$f\in L^{1,p}(M)$に収束することを，$(\nabla f_n)_{n\geq n}$が$L^p(M)$内$\nabla f$に収束し，更に$(f_n)_{n\geq 1}$がa.e.にfに収束することであるとする．此の収束で$L^{1,p}(M)$に位相を与えるとき，$C_0^\infty(M)$の$L^{1,p}(M)$内の閉被を$L_0^{1,p}(M)$と記す（$W^{1,p}(M)$には$\|f;W^{1,p}(M)\|:=\|f;L^p(M)\|+\|\nabla f;L^p(M)\|$と定めたノルムにより位相を与え，それに関する$C_0^\infty(M)$の$W^{1,p}(M)$内の閉被を$W_0^{1,p}(M)$と記す）．

(14) $$\mathcal{M}_p(M):=L^{1,p}(M)\cap L^\infty(M)\cap C(M)$$

をM上の指数pのRoyden環と言う．これは

$$\|f;\mathcal{M}_p(M)\|:=\|f;L^\infty(M)\|+\|\nabla f;L^p(M)\|$$

をノルムとするノルム環となる．また

(15) $$\mathcal{M}_{p,0}(M):=L_0^{1,p}(M)\cap L^\infty(M)\cap C(M)$$

を$\mathcal{M}_p(M)$のポテンシャル部分環と言う．

さてT_xMをMの$x\in M$における接空間とし，$TM=\cup_{x\in M}T_xM$をMの接バンドルとする．M上の指数$1<p<\infty$の強単調楕円型作用素$\mathcal{A}$を考える，即ち，$\mathcal{A}$はTMからTMへの写像で次の５条件を満足するものとする：

可測連続性：全ての$x\in M$に対し$\mathcal{A}_x=\mathcal{A}|T_xM$は$T_xM$から$T_xM$への連続写像で，またM上の全ての可測ベクトル場Xに対してxに$\mathcal{A}_x(X)$を対応させる写像はM上可測となる；

正定値性：ある正定数αがあって，殆ど全ての$x\in M$と全てのhに対して

$$\mathcal{A}_x h\cdot h\geq\alpha|h|^p;$$

有界性：ある定数$\beta\geq\alpha$があって，殆ど全ての$x\in M$と全てのhに対して

$$|\mathcal{A}_x h|\leq\beta|h|^{p-1};$$

強単調性：殆ど全ての$x\in M$と全ての$h_1\neq h_2$に対して

$$(\mathcal{A}_x h_1-\mathcal{A}_x h_2)\cdot(h_1-h_2)>0;$$

疑斉次性：殆ど全ての$x\in M$と全てのh及び全ての$\lambda\in R\setminus\{0\}$に対して

$$\mathcal{A}_x(\lambda h)=|\lambda|^{p-2}\lambda\mathcal{A}_x h.$$

この様な$\mathcal{A}$の全体を$\mathcal{A}_p(M)$と記す．$\mathcal{A}\in\mathcal{A}_p(M)$を一つとって準線型楕円型偏微分方程式

(16) $$-\mathrm{div}\ \mathscr{A}_x(\nabla u)=0$$

を考える．Mの開集合G上の(16)の連続弱解uをG上の**$\mathscr{A}$調和関数**（又は$\mathscr{A}_x h=|h|^{p-2}h$ならば**p調和関数**）と言いその全体を${}_{\mathscr{A}}H(G)$（又は${}_pH(G)$）と記す．すると(14)と(15)の関係が次のようになっていることが分かる．任意の$\mathscr{A}\in\mathscr{A}_p(M)$に対して次の$\mathscr{A}$調和分解定理が成り立つ：

(17) $$\mathscr{M}_p(M)=({}_{\mathscr{A}}H(M)\cap\mathscr{M}_p(M))\oplus\mathscr{M}_{p,0}(M).$$

Royden環$\mathscr{M}_p(M)$の極大イデアル空間をM_p^*とすると，Mは完閉空間M_p^*のdenseな開集合となり，$\mathscr{M}_p(M)$の各関数は一意的にM_p^*迄連続に拡張出来て$\mathscr{M}_p(M)$は$C(M_p^*)$のdenseな部分環となることが分かる．M_p^*をMの位数pの**Royden完閉化**，$\Gamma_p(M)=M_p^*\setminus M$をMの位数pの**Royden境界**，

(18) $$\Delta_p(M)=\{\xi\in\Gamma_p(M):\text{全ての}g\in\mathscr{M}_{p,0}(M)\text{に対し}g(\xi)=0\}$$

を位数pの**Royden調和境界**と呼ぶ．双対定理

$$\mathscr{M}_{p,0}(M)=\{g\in\mathscr{M}_p(M):g|\Delta_p(M)=0\}$$

が成り立つ．

Royden境界は良く$\mathscr{A}$調和関数に基づくポテンシャル論に整合しRoyden調和境界は際だった意味を持つ．即ち，任意の$\mathscr{A}\in\mathscr{A}_p(M)$を固定する．$\Gamma_p(M)$上に有界な実関数fを与える．$\Gamma_p(M)$の各点ξに於ける下（又は上）極限がf(ξ)をくだらない（又は上回らない）M上の$\mathscr{A}$優（又は劣）調和関数の下限（又は上限）$\overline{H}_f$（又は$\underline{H}_f$）はM上$\mathscr{A}$調和となり$\overline{H}_f\geq\underline{H}_f$である．この両者が一致するときfは可解であると言って$\overline{H}_f=\underline{H}_f=H_f$とおく．ある$\xi\in\Gamma_p(M)$で

$$\lim_{M\ni x\to\xi}\overline{H}_f(x)=f(\xi)$$

が，全ての$f\in C(\Gamma_p(M))$で成立するとき，ξは$\mathscr{A}$-Dirichlet問題の正則点であると言う．以上がPerron-Wiener-Brelotの方法による一般化Dirichlet問題の解法手順である．さてRoyden境界がポテンシャル論にとって良い境界であり，Royden調和境界がRoyden境界の大切な部分であるとは，次の２つの結果が成り立つことを意味する（例えば[6]参照）：全ての$C(\Gamma_p(M))$の関数は可解である；$\Delta_p(M)$が丁度$\Gamma_p(M)$内の正則点の全体となる．

$\mathscr{A}\in\mathscr{A}_p(M)$を一つ取る．$w\in{}_{\mathscr{A}}H(M)$（又は${}_pH(M)$）であって，wと1-wの最大$\mathscr{A}$調和

（又はp調和）劣関数$w\wedge(1-w)=0$となるとき，wをM上の$\mathscr{A}$調和測度（又はp調和測度）と言い，更に$\nabla w\in L^p(M)$ならばwはp-Dirichlet有限と言う．$\Delta_p(M)$の連結性の一つの説明としては次の結果（[5]）がある．

19．定理．任意の$1<p<\infty$に対して次の４条件は互いに同値である：$\Delta_p(M)$は連結である；全ての$\mathscr{A}\in\mathscr{A}_p(M)$に対して，$M$上のp-Dirichlet有限な$\mathscr{A}$調和測度は定数のみである；或$\mathscr{A}\in\mathscr{A}_p(M)$に対して，$M$上のp-Dirichlet有限な$\mathscr{A}$調和測度は定数のみである；$M$上のp-Dirichlet有限なp調和測度は定数のみである．

20．定理11と12の略証

先ず定理11の証明の骨子を述べる．任意にM上のp-Dirichlet有限p調和測度wを取るとき

$$s:=w(1-w)\in W_0^{1,p}(M)$$

となることが分かる（[5]）．しかもsはM上$\mathscr{A}$優調和でもある．Sobolevの補題

$$W_0^{1,p}(M)\subset\{f\in C(\overline{M}):f|\partial M=0\}\quad(d<p<\infty)$$

に依り$s\in C(\overline{M})$かつ$s|\partial M=0$となる．wが定数になることが言いたいが，仮にwが定数でないと，$w(M)=(0,1)$であることが分かり，これよりwは∂Mの連結な理想境界成分で常に$w>1/2$（又は$w<1/2$）である事が分かり，従ってそこで

$$w=1/2+\sqrt{1-4s}/2\qquad(\text{又は}w=1/2-\sqrt{1-4s}/2)$$

となることにより$w\in C(\overline{M})$で$w|\partial M=1$（又は$w|\partial M=0$）となる．比較原理より$w\equiv1$又は$w\equiv0$となり，wが定数でないとしたことに矛盾する．□

次に定理12の証明の概要を述べる．定理11を使えば，$\Delta_2(M)$が連結で，$\Delta_p(M)$が$1<p<2$に対して非連結であることを言えば良い．Riemannの写像定理によれば，許容領域は双曲的単連結領域だから，Mは円板B^2に等角同値で，$d=2$の場合にはΔ_2は等角不変性を持つから，$\Delta_2(M)=\Delta_2(B^2)$となり，定理2より$\Delta_2(B^2)$は連結だから$\Delta_2(M)$も連結となる．今度は$1<p<2$とするとき，$M$内に$\partial M$への距離が最大となる点$o$を取れば，$o$中心の，$M$に含まれる最大円板の周$C$は$\partial M$と少なくとも２つの相異なる点$a,b$を共有する．$M$の横断線分$\overline{ab}$は$M$を２つの領域$M_1,M_2$に分ける：$M\setminus\overline{ab}=M_1\cup M_2$，$M_1\cap M_2=\emptyset$．$\overline{M}_1\cap C$の中点を$c$とするとき，$a(-1,0),b(1,0),c(0,t)(t>0)$としてよい．三角形$abc$を$V$とするとき

$$V=\{x=(x^1,x^2)\in\mathbf{R}^2:|x^1|<1,0<x^2<t(1-|x^1|)\}\subset M_1$$

である．$x=(x^1,x^2)\in M$の関数$g(x)$を

$$g(x)=\begin{cases}1-x^2/t(1-|x^1|) & (x\in V),\\ 0 & (x\in M_1\setminus V),\\ 1 & (x\in M_2\cup\overline{ab})\end{cases}$$

で定める．Nikodymの定理等を使って調べると，全ての$1<p<2$に対して$g\in W^{1,p}(M)$となることが確かめられる（後出の(39)参照）．$1<p<2$が肝心で$p>2$ならもはや正しくない．あまり簡単ではないが，$g,1-g\notin W_0^{1,p}(M)$であること及び$g(1-g)\in W_0^{1,p}(M)$であることも示される．そこで分解

$$W^{1,p}(M)=({}_pH(M)\cap W^{1,p}(M))\oplus W_0^{1,p}(M)$$

に於けるgのp調和部分wをとる．上のgの性質$g,1-g\notin W_0^{1,p}(M)$からwが非定数であることが分かる．勿論$g\in W^{1,p}(M)$よりwも同じ性質を持つからwはp-Dirichlet有限となる．最後に$g(1-g)\in W_0^{1,p}(M)$から$w(1-w)\in W_0^{1,p}(M)$が従うことが分かる．このwの性質はp調和関数wがp調和測度であることを特徴付るから（[5]），wは非定数であるp-Dirichlet有限p調和測度であることが分かり，定理19より$\Delta_p(M)$の非連結性が分かる． □

21．古典調和の場合

定理9を証明する道筋を以下説明する．その為先ず$p=2$として$\Delta_2(M)$が連結となる条件を考える．${}_2H(M)$を単に$H(M)$と書くのが普通である：

$$H(M)=\{u\in C^2(M):-\Delta u=-\mathrm{div}(\nabla u)=0\},$$

即ち$H(M)$はM上の古典調和関数の全体である．uが2-Dirichlet有限（これも単にDirichlet有限と言う）とは$u\in L^{1,2}(M)$であり，古典調和関数がらみでは$L^{1,2}(M)$の代わりに$D(M)$と書くのが伝統的で，更に

$$HD(M)=\{u\in H(M):u\in D(M)\}$$

と言う記号を使う．また$\overline{M}\subset G_u$となる開集合があって$u\in H(G_u)$となる様な関数uの全体を$H(\overline{M})$と記すことにする．任意の$u\in HD(M)$と任意の正数$\varepsilon>0$をどのように与えても必ず

$$\|\nabla u-\nabla v;L^2(M)\|<\varepsilon$$

となる様な或$v\in H(\overline{M})$が求まると言う性質を持った領域MはHD-tameで有ると言う．uが特に$L^{1,2}(R^d)$に拡張できるものについてのみ上の性質を要求するときは$\overline{M}$はstableであると言うが，HD-tameはこれより強い条件である．さて

22．定理．許容領域MがHD-tameならば，$\Delta_2(M)$は連結である．

証明ではないが，定理22の成り立つ雰囲気を述べる．M上の任意の2-Dirichlet有限2調和測度wをとる．これが定数となることを主張する．そこでこれが定数でないとして矛盾を導く．$0<\lambda<\mu<1$を任意にとり

$$W(\lambda,\mu)=\{x\in M:\lambda<w(x)<\mu\}$$

を考える．この集合のMに関する理想境界の容量が零となることが，簡単ではないが，示される．$\lambda\downarrow 0,\mu\uparrow 1$としながら上の事を解釈すると"$\partial M$上大体$w=0$又は$w=1$"となり，これは更に"$\partial M$に沿って$dw=0$"と言うことになる．さてMがHD-tameであることと，WalshのRunge型調和近似定理により，$\|\nabla u-\nabla h;L^2(M)\|\approx 0$となる$h\in H(R^d)$が求まる．hは調和だから$*dh$は$R^d$上の閉微分形式となりPoincaréの補題により$*dh=d\alpha$となる$\overline{M}$を含む開立方体上の$C^\infty$級の$(d-2)$形式$\alpha$が取れる．Stokesの公式により

$$\int_M|\nabla w(x)|^2dx=\int_M dw\wedge *dw\approx\int_M dw\wedge *dh=\int_M dw\wedge d\alpha$$

$$=(-1)^{d-1}\int_M d\alpha\wedge dw=(-1)^{d-1}\int_M d(\alpha\wedge dw)=(-1)^{d-1}\int_{\partial M}\alpha\wedge dw$$

となる．上の最後の項は∂Mに沿って$dw=0$だから零となる．よって上の最初の項は零であるから$\nabla w=0$，即ちwは定数である．これはwが定数ならずと仮定したことに反する．以上はあくまで証明ではなく感じであり，此の感じを精密化，具体化すると証明になる． □

そこで連続許容領域Mをとり，これがHD-tameとなることを示そう．すると，定理22からとにかく$\Delta_2(M)$は連結となる．この目的で定義を一つ述べる．一般に有界領域Mで，$\partial\overline{M}=\partial M$を満たすものを考える．有界領域$M_n$の列$(M_n)_{n\geq 1}$が

$$M_n\supset M_{n+1}\supset\overline{M}\quad(n\geq 1),\qquad\bigcap_{n\geq 1}M_n=\overline{M}$$

を満たすとき，$(M_n)_{n\geq 1}$を$\overline{M}$のsqueezerと言う．どの様な$f\in C(R^d)$と，どの様なsqueezer$(M_n)_{n\geq 1}$をとっても$(H_f^{M_n})_{n\geq 1}$は$\overline{M}$上収束し，M上局所一様に調和関数に収束する．此の極限関数$H_f^{\overline{M}}$は$(M_n)_{n\geq 1}$の取り方に依存しないことが示される．そこでM上

$H_f^{\overline{M}}=H_f^M$となるときKeldysh[2]に従ってMはDirichlet安定であるという．特に，∂Mの点yが$\lim_{n\to\infty}H_f^{M_n}(y)=f(y)$を全ての$f\in C(R^d)$で満たすときyを安定点であると言う．MがDirichlet安定となるための必要十分条件は調和測度0の∂Mの点集合を除いた残りの点が安定点となることである（[2]）．すると

23．補題．連続有界領域MはDirichlet安定である．

これは，∂Mの正則点がすべて此の場合には安定点になることを言って，上記した所のKeldishの結果を使って示される．Mは連続領域だから局所的にはMを一定方向に1/nだけ平行移動するとM_nと一致するような$\overline{M}$のsqueezer$(M_n)_{n\geq1}$が取れることと，調和関数の平行移動による不変性を使って，技術的には面倒な議論を要するが，上の補題が示される．□

24．補題．連続有界領域MはHD-tameである．

証明：任意の$u\in HD(M)$と任意の正数$\varepsilon>0$を取る．周知のごとく連続有界領域Mに対しては$C^\infty(R^d)$は$L^{1,2}(M)$内でdenseであるから（例えば[3]参照），$\|\nabla u-\nabla f;L^2(M)\|<\varepsilon/2$となる$f\in C^\infty(R^d)$がとれる．$(M_n)_{n\geq1}$を$\overline{M}$の任意の一つのsqueezerとする．するとDirichlet原理により

$$\lim_{n\to\infty}\|\nabla H_f^{M_n}-\nabla H_f^{\overline{M}};L^2(M)\|=0$$

が示される．しかし補題23によれば，$H_f^{\overline{M}}=H_f^M$であるから，十分大きなnをとれば

$$\|\nabla H_f^{M_n}-\nabla H_f^M;L^2(M)\|<\varepsilon/2$$

に出来る．$H_{u-f}^M=u-H_f^M$だから，再びDirichlet原理により

$$\|\nabla u-\nabla H_f^M;L^2(M)\|\leq\|\nabla u-\nabla f;L^2(M)\|<\varepsilon/2$$

だから，$\|\nabla u-\nabla H_f^{M_n};L^2(M)\|<\varepsilon$となり，$H_f^{M_n}\in H(\overline{M})$が求めるものである．□

25．定理9の証明

指数$1<p<q<\infty$を一組任意に固定する．Mが有界ならば常に

$$W_0^{1,p}(M)\cap W^{1,q}(M)\supset W_0^{1,q}(M)$$

となるが，逆の包含関係が成り立つとき，従って

(26) $$W_0^{1,p}(M)\cap W^{1,q}(M)=W_0^{1,q}(M)$$

となるとき，Mは(p,q)-subordinateであると言うことにする．すると

27．補題．Mを連続有界領域とすると，Mは全ての$1<p<q<\infty$に対して，常に(p,q)-subordinateである．

これは$C^\infty(R^d)$が$L^{1,2}(M)$内denseであることの証明と全く同様に示される．そこで定理9の証明のあらすじに進む．$2\leq p\leq d$を任意に取る．上の補題27により，特にMを連続許容領域とするとき，Mは(2,p)-subordinateとなる．さて$\Delta_2(M)$は補題24と定理22により連結であることに注目する．これらに基づいて$\Delta_p(M)$が連結であることを示そう．任意のp-Dirichlet有限p調和測度wをとって，これが定数になることを言えばよい．$w(1-w)\in W_0^{1,p}(M)$がp調和関数wのp調和測度となる為の特徴的性質であった([5])．$w\in W^{1,p}(M)\subset W^{1,2}(M)$だから，分解

$$W^{1,2}(M)=(H(M)\cap W^{1,2}(M))\oplus W_0^{1,2}(M)$$

に於けるwの調和部分をw_1としよう．$w(1-w)\in W_0^{1,p}(M)\subset W_0^{1,2}(M)$であることを使うと$w_1(1-w_1)\in W_0^{1,2}(M)$が結論される．これは$w_1$が2-Dirichlet有限2調和測度であることを意味する([5])ので，$\Delta_2(M)$が連結なことからM上$w_1\equiv c=0$又は1となる．これは$w-c\in W_0^{1,2}(M)$を意味し，従って$w-c\in W_0^{1,2}(M)\cap W^{1,p}(M)=W_0^{1,p}(M)$となることがMが(2,p)-subordinateであることより結論される．再び分解

$$W^{1,p}(M)=({}_pH(M)\cap W^{1,p}(M))\oplus W_0^{1,p}(M)$$

とその一意性により，M上$w\equiv c$となって$\Delta_p(M)$の連結であることが分かる． □

28．境界特性関数の存在

定理10の証明へ進む．$1<p<2$となる任意のpをとり，ついで

$$r>\max(2p/(2-p),p/(p-1))$$

となるrを任意に固定する．MをR^d内の指数rの弱Lipschtz領域とするとき，次のようなM上の関数fが存在することを以下に示す：

(29) $f\in W^{1,p}(M),\ \ f,1-f\notin W_0^{1,p}(M),\ \ f(1-f)\in W_0^{1,p}(M).$

このfの，分解

$$W^{1,p}(M)=({}_pH(M)\cap W^{1,p}(M))\oplus W_0^{1,p}(M)$$

に於けるp調和部分wを取るとwは非定数p-Dirichlet有限p調和となり$\Delta_p(M)$の非連結性が分かる．以下で説明するfの作り方からわかる様に，∂Mの任意の開集合$U\neq\Phi$をとるとき，$U\supset V\neq\Phi$となる或開集合Vがあってfはvで境界値1，$\partial M\setminus\overline{V}$では境界値0を取るように作れる．$M_p^*$から$\overline{M}$への連続写像$\pi$で$\pi|M=id.$となるものがある．fは，そして大体に於てwは，境界値の意味で境界上では$\pi^{-1}(V)$の中に台を持つ．以上の考察により$\Delta_p(M)$は単に非連結であるばかりではなく実は無限個の連結成分からなることを注意しておく．

ゆえに(29)を満たすfを構成して見せれば全てが終る．以下その道筋の大体を説明する．任意に$\xi\in\partial M$を一つ固定する．するとξでのMの局所表示関数$x^d=\varphi(x')$で指数rのSobolev関数であり(7)を満足するものが一つ取れる．$B'(\xi,\rho)\times\mathbf{R}$ ($\rho=\rho(\xi)>0$)からそれ自身への写像Ψを

$$\Psi(x',x^d)=(x',x^d-\varphi(x'))$$

により定める．$y=\Psi(x)$は$B'(\xi,\rho)\times\mathbf{R}$からそれ自身への位相写像であり，又$\Psi$の逆写像$\Psi^{-1}$は

$$\Psi^{-1}(y',y^d)=(y',y^d+\varphi(y'))\quad ((y',y^d)\in B'(\xi,\rho)\times\mathbf{R})$$

で与えられる．$\Psi=(\Psi_1,\cdots,\Psi_d)$はACLで殆ど到るところ微分可能で，可測な古典的勾配$\nabla\Psi=(\nabla\Psi_1,\cdots,\nabla\Psi_d)\in L^r(B'(\xi,\rho))$をもつ．$\Psi'$を$\Psi$の形式的導関数，即ち，第i行が$\nabla\Psi_i$であるd×d行列とする．明らかに$\Psi$のJacobian J_Ψは

(30) $J_\Psi(x)=\det\Psi'(x)=1\quad$ (a.e. $x\in B'(\xi,\rho)$)

を満たす．(7)によれば

(31) $\limsup_{h\to 0}\dfrac{|\Psi(x+h)-\Psi(x)|}{|h|}<\infty\quad (x\in B'(\xi,\rho))$

となるから，Rademacherの定理により，(30)を使えば変数変換の公式

(32) $\displaystyle\int_{\Psi^{-1}(A)}u(\Psi(x))dx=\int_A u(y)dy$

が全ての可測集合$A\subset B'(\xi,\rho)\times\mathbf{R}$と関数$u\in L^1(A)$に対して成立する．以上の事は全く同様に$\Psi^{-1}$についても言える．さて

$$X=\{(x',x^d):|x'|<a,\varphi(x')<x^d<\varphi(x')+b\}$$

とおく．但し正数$0<a,b<\rho(\xi)$は十分に小に取ることにして$X\subset B(\xi,\rho(\xi))\cap M$となっている様にする．又

$$Y=\{(y',y^d):|y'|<a,0<y^d<b\}$$

とおく．$\Psi(X)=Y,\Psi^{-1}(Y)=X$である．Y上の関数uに対して，uのΨによるX上への引き戻し$u\circ\Psi$をΨ^*uと記すことにする．すると

33．**補題．**Ψ^***は**$W^{1,rp/(r-p)}(Y)$**から**$W^{1,p}(X)$**への連続写像である．**

略証：任意の$u\in W^{1,rp/(r-p)}(Y)$をとるとき，常に$\Psi^*u\in W^{1,p}(X)$となり不等式

(34) $$\|\Psi^*u;W^{1,p}(X)\|\leq C\|u;W^{1,rp/(r-p)}(Y)\|$$

が成り立つことを示す．但し$C=\max(\|\nabla\Psi;L^r(X)\|,1)$である．最初にuが滑らかな場合，即ち$u\in C^\infty(Y)\cap W^{1,rp/(r-p)}(Y)$を任意に取ったときを考える．$\Psi^*u$には通常の微分計算が許されるので，(32)の公式や，Hölderの不等式及びNikodymの定理等を適用することにより，上の主張が導かれる．最後に空間$C^\infty(Y)\cap W^{1,rp/(r-p)}(Y)$が$W^{1,rp/(r-p)}(Y)$の中でdenseな事により，一般の場合は極限移行によって所求の結論が得られる．□

35．**補題．**$(\Psi^{-1})^*$**は**$W^{1,p}(X)$**から**$W^{1,rp/(r+p)}(Y)$**への連続写像である．**

証明：補題33の証明のXとYの役割を取り替え，Ψの代わりにΨ^{-1}を使い，$p=rq/(r-q)$となる$q=rp/(r+p)$をとれば$(\Psi^{-1})^*$は$W^{1,rq/(r-q)}(X)=W^{1,p}(X)$から$W^{1,q}(Y)=W^{1,rp/(r+p)}(Y)$への連続写像であることが分かる．$\max(2p/(2-p),p/(p-1))<r$の様にrがとってあったが，これは$1<q<2$と同値である．□

36．**補題．次の２つの包含関係が成り立つ：**

(37) $$\Psi^*\left(W_0^{1,rp/(r-p)}(Y)\right)\subset W_0^{1,p}(X);$$

(38) $$\Psi^*\left(W^{1,rp/(r-p)}(Y)\setminus W_0^{1,rp/(r-p)}(Y)\right)\subset W^{1,p}(X)\setminus W_0^{1,p}(X).$$

証明：uがYの中で完閉台の関数であるとΨ^*uもまたXの中で完閉台を持つ．このことに注意すれば(37)は補題33から直ちに従う．$u\in W^{1,rp/(r-p)}(Y)\setminus W_0^{1,rp/(r-p)}(Y)$

を任意に取ると，とにかく$\Psi^* u \in W^{1,p}(X)$である．(38)を示すため背理法で仮に$\Psi^* u \in W_0^{1,p}(X)$であったとする．補題33次いで35を使うと，(37)を出したと同様にして

$$(\Psi^{-1})^* \left(\Psi^* u\right) = (u \circ \Psi) \circ \Psi^{-1} = u \in W_0^{1,rp/(r+p)}(Y)$$

となる．$1<rp/(r+p)<rp/(r-p)<2$でありYは連続領域であるから補題27を使うとYは$(rp/(r+p), rp/(r-p))$-subordinateであることが分かり

$$u \in W_0^{1,rp/(r+p)}(Y) \cap W^{1,rp/(r-p)}(Y) = W_0^{1,rp/(r-p)}(Y)$$

となって，最初のuの選び方に矛盾する． □

さてここで円錐関数とでも呼べば印象的であろう関数gを以下の様に作る．$0<c<\min(a,b)$となるような任意のcに対して，円錐

$$V_c = \{(y', y^d) \in \mathbf{R}^d : 0 < y^d < c - |y'|\}$$

を考えると，常に$V_c \subset Y$である．この様なcを任意に一つ固定して$V=V_c$とおく．Y上の関数gを次式で定める：

$$g(y) = \begin{cases} 1 - y^d/(c - |y'|) & (y = (y', y^d) \in V), \\ 0 & (y \in Y \setminus V). \end{cases}$$

容易に見て取れるように$g \in C(Y)$でしかもY上$0 \leqq g < 1$である．具体的な計算とNikodymの定理を使って次の事実が確かめられる：

(39) $$g \in W^{1,q}(Y) \quad (1<q<2).$$

gの∂Yに於ける境界挙動は，Yの底面の円板$U = \partial Y \cap \{|y'|<c, y^d=0\}$では境界値1を持ち$\partial Y \setminus U$では境界値0を持つ．従ってgはYの境界上では円板Uの特性関数を与えている訳である．gは更に次の性質を持つ．

40．補題．全ての$1<q<2$に対して，gも$1-g$も$W_0^{1,q}(Y)$に入らない．

証明：特別の関数$u(y) = u(y', y^d) = y^d$を考えよう．uはV上q調和，即ち，uはV上q-Laplace方程式

$$-\mathrm{div}(|\nabla u|^{q-2} \nabla u) = 0$$

を本来の意味で満たすから無論弱解の意味でも満たす様な連続関数である．そこでgも$1-g$も同時に扱う目的で，$h=g$又は$h=g-1$を表すものとする．$h \notin W_0^{1,q}(Y)$が言いたいので背理法で$h \in W_0^{1,q}(Y)$と仮定して矛盾を導く．hを$W^{1,q}(Y)$の中で$C_0^\infty(Y)$の元で近似す

ることにより，uの弱解条件より

(41) $$\int_Y |\nabla u(y)|^{q-2}\nabla u(y)\cdot\nabla h(y)dy=0$$

でなければならぬことが一方からは結論される．他方に於てこれに反する結果が以下の様に導かれる．$0'=(0,\cdots,0)\in R^{d-1}$，$\nabla' h=(\partial h/\partial y^1,\cdots,\partial h/\partial y^{d-1})$の記号を使う．$|\nabla u(y)|^{q-2}\nabla u(y)\cdot\nabla h(y)$を具体的に計算すると

$$|(0',1)|^{q-2}(0',1)\cdot(\nabla' h,1/(c-|y'|)=1/(c-|y'|)$$

に等しい．ゆえに$|B^{d-1}|$を$(d-1)$次元単位球$B^{d-1}=B'(0,1)$の体積として

$$\int_Y |\nabla u(y)|^{q-2}\nabla u(y)\cdot\nabla h(y)dy=\int_V (c-|y'|)^{-1}dy$$

$$=\int_{|y'|<c}\left(\int_0^{c-|y'|}(c-|y'|)^{-1}dy^d\right)dy'=c^{d-1}|B^{d-1}|>0$$

となる．これは(41)に矛盾する． □

42．補題．全ての$1<q<2$に対して$g(1-g)\in W_0^{1,q}(Y)$である．

証明：$c<c'<\min(a,b)$となるc'をとって$V_{c'}\subset\Omega\subset Y$となる様な$C^2$領域$\Omega$をとる．そこで$E=\{(y',0):|y'|=c\}\subset\partial\Omega$を考える．$h:=g(1-g)$は$\Omega\setminus E$迄連続に拡張できて，拡張した$h|(\partial\Omega\setminus E)=0$である．しかも曲面$\partial\Omega$内の曲面積で計って面積$|E|=0$である．さて$\gamma:W^{1,q}(\Omega)\to L^q(\partial\Omega)$をtrace作用素とする．各$\zeta\in\partial\Omega$に対して$\mathbf{n}_\zeta$を$\zeta$に於ける内法線とすると

$$(\gamma h)(\zeta)=\lim_{y\in\mathbf{n}_\zeta,\,y\to\zeta} h(y)=0$$

が$\zeta\in\partial\Omega\setminus E$，即ちa.e.$\zeta\in\partial\Omega$で成り立つことになるので，$\gamma h=0$であり，$h\in\gamma^{-1}(0)=W_0^{1,q}(\Omega)$が結論される．$\Omega\subset Y$で$Y\setminus\Omega$で$h=0$だから，$h\in W_0^{1,q}(Y)$となる． □

以上に述べてきた補題のいくつかを利用して目的の(29)を証明する．上に定義した写像Ψと円錐関数gをとる．rのとりかたによれば$1<rp/(r-p)<2$であるから，(39)によれば$g\in W^{1,rp/(r-p)}(Y)$である．X上$F=\Psi^*g=g\circ\Psi$とおき，

$$f(x)=\begin{cases}F(x) & (x\in X),\\ 0 & (x\in M\setminus X)\end{cases}$$

とすると$f\in C(M)$である．補題33によれば$F\in W^{1,p}(X)$，更に補題40によればFも1-Fも

$W_0^{1,p}(X)$に入らない．しかし$\Psi^*(g(1-g))=F(1-F)$だから，補題36と42によれば $F(1-F)\in W_0^{1,p}(X)$となる．fの定義から，X上のFの結果をMへ移行出来て，(29)が示される． □

43．文献

[1] D.A. Herron and P. Koskela: *Continuity of Sobolev functions and Dirichlet finite harmonic measures*, Potential Analysis (to appear).

[2] M.V. Keldysh: *On the solvability and stability of the Dirichlet problem*, Uspekhi Mat. Nauka, 8(1941), 171-231; English translation: Amer. Math. Soc. Translations (2), **51**(1966), 1-73.

[3] V.G. Maz'ya: *Sobolev Spaces*, Springer, 1985.

[4] M. Nakai: *Riemannian manifolds with connected Royden harmonic boundaries*, Duke Math. J., **67**(1992), 589-625.

[5] M. Nakai: *Existence of Dirichlet finite harmonic measures on Euclidean balls*, Nagoya Math. J., **133** (1994), 85-125.

[6] M. Nakai: *Potential theory on Royden compactifications*, Bull. Nagoya Inst. Tech., **47**(1995), 171-191 (in Japanese).

[7] M. Nakai: *Boundary continuity of Dirichlet finite harmonic measures on compact bordered Riemannian manifolds*, Hiroshima Math. J. (to appear).